L'objet de ce problème est l'étude des suites de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant aux 3 conditions (C) suivantes :

(C)

(1) $P_0(x) = 1$

(2) P_1 n'est pas le polynôme nul

(3) Pour tout entier naturel n, pour tous réels x et y on a :

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)\,P_{n-k}(y)$$

On ne distingue pas un polynôme et la fonction polynôme associée.

Tout résultat d'une question, même non démontré, pourra être utilisé dans les questions suivantes.

Partie I -

Dans cette partie, après quelques exemples de suites $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifiant (C), on en donne une construction générale.

I.A -

I.A.1) La suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est définie par :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour } n \geq 1$$

Montrer que cette suite vérifie (C).

I.A.2) On considère la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x(x+n)^{n-1} \qquad \text{pour } n \geq 1$$

a) Vérifier, pour $n \geq 1$, la relation $P'_n(x) = P_{n-1}(x+1)$.

b) En déduire que cette suite $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifie (C).

I.B -

I.B.1) $(P_n)_{n\geq 0}$ désigne maintenant une suite quelconque vérifiant (C).

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $P_n(0) = 0$.

b) Montrer que P_1 est de degré 1.

c) On pose $P_1(x) = a_1 x$. Monter que P_n est de degré n et expliciter son terme de degré n en fonction de a_1.

I.B.2) Pour tout $n \geq 1$ on pose $a_n = P'_n(0)$. Établir, pour tout $n \geq 1$, la relation :

$$P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}P_k(x).$$

I.B.3) Réciproquement on se donne une suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$, avec $a_1 \neq 0$

a) Montrer qu'il existe une suite et une seule $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les 3 conditions (C') suivantes :

(C')

(1) $P_0(x) = 1$

(2) $P_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$

(3) $P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}P_k(x)$ pour $n \geq 1$

b) Soit :

$$u_n(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \qquad \text{et} \qquad V_n(x,t) = e^{x u_n(t)}$$

On suppose démontré qu'il existe une suite de polynômes $(\pi_n)_{n\geq 0}$ tel que, pour tout entier n donné

$$V_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \pi_k(x)\,t^k + t^n \varepsilon_n(x,t)$$

où, pour x fixé, $\lim_{t\to 0} \varepsilon_n(x,t) = 0$.

Calculer $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$.

Montrer que la suite (π_n) vérifie (C) et (C'). En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $\pi_n = P_n$ et ensuite que les conditions (C) et (C') sont équivalentes.

Partie II -

Dans cette partie, on considère une suite de polynômes vérifiant les conditions équivalentes (C) et (C') et possédant la propriété suivante :

la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est la suite définie en I par $a_n = P'_n(0)$, a un rayon de convergence R non nul (éventuellement infini).

On se propose d'étudier $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\,t^n$.

Pour $|t| < R$ on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,(|t|)^n$$

II.1)

a) Établir, pour x réel, $|t| < R$ et $n \geq 0$, les majorations suivantes

$$\left|t^n P'_n(x)\right| \leq \tilde{f}(t)\, e^{|x|\tilde{f}(t)} \qquad \text{et} \qquad \left|t^n P_n(x)\right| \leq e^{|x|\tilde{f}(t)}$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser les conditions (C').

b) En déduire que, pour tout x réel fixé, les séries entières en t

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\,t^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x)\,t^n$$

ont un rayon de convergence au moins égal à R.

II.2) On suppose, dans cette question, t fixé dans]- R, R [et x variable.

a) Montrer que la convergence de la série de fonctions de la variable x

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x)\,t^n$$

est normale sur tout intervalle fermé [- M, M] de $\mathbb{R}$.

(On pourra considérer par exemple $r^n\left|P'_n(x)\right|\left|\frac{t}{r}\right|^n$, r étant convenablement choisi).

b) On pose

$$S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\,t^n.$$

Montrer que S_t est une fonction de x dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une relation entre la dérivée $S'_t(x)$ de cette fonction de x, $S_t(x)$ et f(t).

c) En déduire

$$S_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\,t^n = e^{xf(t)}$$

II.3) Déterminer f (t) et R dans les cas suivants :

a)

$$P_0(x) = 1$$

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour } n \geq 1$$

b)

$$P_0(x) = 1 \qquad\qquad P_1(x) = x$$

pour $n \geq 2$ $\quad P'_n(x) = P_{n-2}(x) + P_{n-1}(x)$ et $\quad P_n(0) = 0$

Partie III -

Dans cette partie on reprend la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ du I.A.2.

On lui associe la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $a_n = P'_n(0)$.

On rappelle la relation $P'_n(x) = P_{n-1}(x+1)$ pour $n \geq 1$.

III.1)

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$.

Soit, pour $|t| < R$, $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$.

b) En exprimant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x)\,t^n$$

de deux façons différentes, en fonction de x et de f (t), montrer que l'on a, pour $|t| < R$,

$$te^{f(t)} = f(t).$$

III.2)

a) Étudier les variations de la fonction de la variable réelle u définie par $u \to ue^{-u}$.

b) En déduire que f est la fonction réciproque d'une fonction simple φ.

c) Étudier les variations de f et φ et construire leurs courbes représentatives.

d) Calculer la borne inférieure m de f à 10^{-3} près.

Partie IV -

Soit E l'espace vectoriel des endomorphismes (ou opérateurs) de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$. On note en particulier D l'opérateur de dérivation (D(P) = P').

Étant donné une suite

$$\beta = (b_n)_{n \geq 1}$$

de réels avec $b_1 \neq 0$, on lui associe l'opérateur U_β défini par :

pour tout P de $\mathbb{R}[X]$

$$U_\beta(P) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n P^{(n)}$$

($P^{(n)}$ désignant la dérivée $n^{ième}$ de P)

IV.1)

a) Vérifier que U_β est bien défini.

b) Pour k entier non nul, quel est le degré de $U_\beta(X^k)$.

c) En déduire que pour tout entier k, $k \geq 1$, la restriction de U_β à $\mathbb{R}_k[X]$, sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k, est une surjection de $\mathbb{R}_k[X]$ sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Montrer que U_β est une surjection de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même.

d) Quel est le noyau de U_β ?

IV.2) Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes, notée $(P_n)_{n \geq 0}$ vérifiant les 3 conditions C" suivantes :

C" :
- $P_0 = 1$
- $U_\beta(P_n) = P_{n-1}$ pour $n \geq 1$
- $P_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$

IV.3) On se propose d'établir que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ vérifie (C) ou (C') avec les notations du I, où pour C' on prend la suite

$$a_n = P'_n(0) \qquad (n \geq 1)$$

a) Vérifier que U_β et D commutent.

b) Établir (C') par récurrence sur n.

IV.4) Déterminer b_n et U_β dans le cas

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

IV.5) On reprend pour $(P_n)_{n \geq 0}$ la suite étudiée au III ou au I.A.2. On se propose de déterminer une suite

$$\beta = (b_n)_{n \geq 1}$$

telle que U_β vérifie (C") relativement à la suite $(P_n)_{n \geq 0}$.

a) On rappelle que

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x-1).$$

En déduire

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} P_{n+1}^{(k)}(x).$$

b) Déterminer une suite β répondant à la question.

••• FIN •••